MINISTERUL APĂRĂRII NAŢIONALE
ACADEMIA NAVALĂ "MIRCEA CEL BĂTRÂN"
FACULTATEA DE MARINĂ MILITARĂ
Sesiunea IULIE 2013

A P R O B
PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE
Cdor.
Conf. univ. Dr. ing.
Mihail PRICOP

PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ

1. Se consideră familia de parabole $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1,\ m \in \mathbb{R}^*$.

a) Să se determine m astfel încât f_m să aibă o valoare minimă negativă.

b) Să se determine m astfel încât vârfurile asociate familiei de parabole să se găsească pe dreapta de ecuaţie $y = x + 1$.

c) Pentru $m = 2$, să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$, unde x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $f_2(x) = 0$.

2. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de raţie r.

a) Pentru $a_1 = 5$ şi $r = 3$, să se calculeze a_{11}.

b) Dacă $a_3 + a_7 = 50$, să se calculeze $a_4 + a_5 + a_6$.

c) Să se exprime suma $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2013} a_{2014}}$ în funcţie de a_1 şi r.

3. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{C}$.

a) Să se arate că $(A(x))^2 = 2xA(x), \forall x \in \mathbb{C}$ şi să se determine toate numerele $x \in \mathbb{C}$ astfel încât să aibă loc egalitatea $(A(x))^4 + (A(x))^2 = O_2$, unde O_2 este matricea nulă.

b) Să se calculeze $(A(i))^{2013}$.

c) Să se rezolve ecuaţia matriceală $X^2 = A(0),\ X \in M_2(\mathbb{C})$.

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2+m\cdot e^x, & x\le 1, \\ x\cdot\ln x, & x>1, \end{cases} \quad m\in\mathbb{R}.$$

a) Să se determine m astfel încât f să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că f nu are asimptote.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x-2013}$.

5. Fie $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se calculeze I_2.

c) Să se calculeze I_n.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este de 3 ore.

SECRETARUL COMISIEI DE ADMITERE,
Cpt. Cdor.
Ionel POPA

BAREM DE CORECTARE

1. a) $\begin{cases} a>0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \dfrac{m-1}{m}<0 \end{cases}$ 2,5p

$m\in(0,1)$ 0,5p

b) $V(x_V, y_V)$, $x_V=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{1-m}{m}$, $y_V=\dfrac{m-1}{m}$ 2p

$y=x+1\Leftrightarrow m=2$ 1p

c) $f_2(x)=2x^2+2x+1$, $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-1$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$ 1.25p

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$ 1.25p

$x_1^3+x_2^3=\dfrac{1}{2}$ 0,5p

2. a) $a_{11}=a_1+10r$ 2p

$a_{11}=35$ 1p

b) $a_3+a_7=50\Leftrightarrow a_1+4r=25$ 1,5p

$a_4+a_5+a_6=3a_1+12r=75$ 1,5p

c) $S=\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{2013}}-\dfrac{1}{a_{2014}}\right)$ 1,5p

$S=\dfrac{1}{r}\dfrac{a_{2014}-a_1}{a_1a_{2014}}$ 0,5p

$S=\dfrac{2013}{a_1(a_1+2013r)}$ 1p

3. a) Prin calcul $(A(x))^2=2xA(x)$ 1p

$(A(x))^4=(2x)^3A(x)$, $(A(x))^4+(A(x))^2=O_2 \Leftrightarrow \left[(2x)^3+2x\right]A(x)=O_2$ 1p

$x_1=0, x_{2,3}=\pm\dfrac{i}{2}$ 1p

b) Prin inducţie, se obţine $(A(x))^n=(2x)^{n-1}A(x)$, $n\ge 1, x\in\mathbb{C}$ 2p

$(A(i))^{2013}=(2i)^{2012}A(i)=2^{2012}A(i)$ 1p

c) $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d\in\mathbb{C}$,

$X^2=A(0)\Rightarrow \det X^2=\det A(0)\Leftrightarrow (\det X)^2=0\Rightarrow \det X=0$ 1p

Relaţia lui Cayley, $X^2-(a+d)X+(ad-bc)I_2=O_2 \Rightarrow X^2=(a+d)X$ 1p

$$X^2=A(0)\Leftrightarrow (a+d)X=A(0)\Leftrightarrow \begin{cases}(a+d)a=1\\(a+d)b=-1\\(a+d)c=1\\(a+d)d=-1\end{cases} \Rightarrow a+d=0\Rightarrow X^2=O_2\neq A(0)\Rightarrow$$

ecuaţia matriceală nu are soluţii în $M_2(\mathbb{C})$.. 1p

4. a) f continuă pe $(-\infty,1)$, f continuă pe $(1,\infty)$ 0,5p

$l_s(1)=1+m\cdot e$, $l_d(1)=0$, $f(1)=1+m\cdot e$ 2p

$m=-\frac{1}{e}$ 0,5p

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, f nu are asimptotă orizontală spre $-\infty$ 0,6p

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$, f nu are asimptotă oblică spre $-\infty$ 0,6p

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$ 0,6p

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$ 0,6p

Deoarece pe domeniul de definiţie f nu are puncte de discontinuitate de speţa a doua rezultă că f nu are asimptote verticale.. 0,6p

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2013}\ln x=+\infty$ 3p

5. a) $\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$, $tgx=t, dx=\frac{dt}{1+t^2}$, $\int\frac{dt}{(t+1)(t^2+1)}$ 0,5p

$\frac{1}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}$ 0,5p

$A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}$ 0,5p

$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{tgx+1}{\sqrt{tg^2x+1}}+\frac{1}{2}x+C$ 1p

$I_1=\frac{\pi}{4}$ 0,5p

b) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ 1p

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ 1p

$I_2 = \frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ 1p

c) Fie $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$ 1p

$x = \frac{\pi}{2} - t$, $J_n = I_n$ 1p

$I_n + J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ 0,5p

$I_n = \frac{\pi}{4}$ 0,5p

Observaţie. Din c), pentru $n=1$ se obţine $I_1 = \frac{\pi}{4}$ şi pentru $n=2$, $I_2 = \frac{\pi}{4}$.

NOTĂ. Orice altă rezolvare corectă a problemelor se evaluează cu punctajul maxim.

Preşedintele Comisie de Admitere,
Cdor.
Conf. univ. Dr.
Mihail PRICOP

Secretarul Comisie de Admitere,
Cpt. Cdor.
Ionel POPA