PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ

1. a) Aflaţi $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care ecuaţia

$$mx^2 + (3m-1)x + 2m - 1 = 0$$

are rădăcini reale şi distincte.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+16} - x + 4 = 0$.

c) Să se determine valorile parametrului real m astfel încât între rădăcinile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei

$$x^2 - 3x + m = 0$$

să existe relaţia $x_1^3 + x_2^3 = -3$.

2. a) Să se calculeze suma

$$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2011}}.$$

b) Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 2 \end{cases}$$

c) Să se rezolve ecuaţia $C_{x+3}^{x+1} = x^2 - 4$.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze A^3.

b) Să se afle rangul matricei $I_3 + A + A^t$.

c) Să se determine inversa matricei $I_3 + A$.

4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{2(x+1)},\ a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine valorile parametrilor reali a şi b astfel încât punctul $A(0,-1)$ să aparţină graficului funcţiei f şi $x = 1$ să fie abscisa unui punct de extrem.

b) Pentru $a = -5,\ b = -2$, să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

c) Pentru $a = -5,\ b = -2$, să se calculeze $f''(x),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5. Se consideră funcţia $f_{m,n} : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_{m,n}(x) = \dfrac{x^n}{x^m + 1},\ m, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pentru $m = 1$ şi $n = 2$ determinaţi $\int f_{m,n}(x)\,dx$;

b) Pentru $m = 2$ şi $n = 1$ calculaţi $\int_0^1 f_{m,n}(x)\,dx$;

c) Pentru $m = 1$ şi $n = 1$ calculaţi aria mulţimii delimitată de graficul funcţiei $f_{m,n}(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

BAREM PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ

1. a) $\Delta > 0$ ....1 p

$\Delta = b^2 - 4ac = (3m-1)^2 - 4m(2m-1) = (m-1)^2$ ....1 p

$m \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ ....1 p

b) $x+16 \geq 0$, $x-4 \geq 0$, $x \in [4,\infty)$ ....1 p

$x^2 - 9x = 0$ ....1 p

$x = 9$ ....1 p

c) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 3$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = m$ ....1 p

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$ ....1 p

$m = \dfrac{10}{3}$ ....1 p

2. a) $S = 1 + \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \ldots + \dfrac{\sqrt{2011}-\sqrt{2010}}{2011-2010} + \dfrac{\sqrt{2012}-\sqrt{2011}}{2012-2011}$ ....1 p

$S = 1 + \dfrac{\sqrt{2}-1}{1} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} + \ldots + \dfrac{\sqrt{2011}-\sqrt{2010}}{1} + \dfrac{\sqrt{2012}-\sqrt{2011}}{1}$ ....1 p

$S = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{2011} - \sqrt{2010} + \sqrt{2012} - \sqrt{2011} = \sqrt{2012}$ ....1 p

b) x>0, y>0, $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 2^2 \end{cases}$ ....1 p

$t^2 - St + P = 0$ ....1 p

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$ ....1 p

c) $\begin{cases} x+1 \in \mathbb{N} \\ x+3 \in \mathbb{N} \\ x+3 \geq x+1 \end{cases}$ ....1 p

$\dfrac{(x+3)!}{(x+1)!(x+3-x-1)!} = x^2 - 4$ ....1 p

$\dfrac{(x+3)(x+2)}{2} = x^2 - 4 \Rightarrow x = 7$ ....1 p

3. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ....1 p

$A^3 = A^2 \cdot A$ ....1 p

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$ ....1 p

b) $I_3 + A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ....1 p

$\det(I_3 + A + A^t) = 0$ şi toţi minorii de ordinul al doilea sunt nuli ....1 p

$rang\left(I_3+A+A^t\right)=1$ ....1 p

c) $I_3+A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\det\left(I_3+A\right)=1$...1 p

$\left(I_3+A\right)^t=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\left(I_3+A\right)^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$ ....1 p

$\left(I_3+A\right)^{-1}=\dfrac{1}{\det\left(I_3+A\right)}\left(I_3+A\right)^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$ ....1 p

4. a) $f(0)=-1 \Leftrightarrow b=-2$ ....1 p

$f'(x)=\dfrac{x^2+2x+(a-b)}{2(x+1)^2}$ ....1 p

$f'(1)=0 \Leftrightarrow a=-5$...1 p

b) $l_s(-1)=-\infty$, $l_d(-1)=+\infty$ $\Rightarrow x=-1$ este asimptotă verticală. ....1 p

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\Rightarrow$ graficul funcţiei nu admite asimptote orizontale spre $\pm\infty$. ....0.5 p

$m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$ ....0.5 p

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=-3$ ....0.5 p

$y=\dfrac{1}{2}x-3$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei spre $\pm\infty$...0.5 p

c) $f''(x)=\dfrac{4}{(x+1)^3}$ ....3 p

5. a) $\int\dfrac{x^2}{x+1}dx=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln\left|x+1\right|+C$ ....3 p

b) $\int_0^1\dfrac{x}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\ln 2$ ....3 p

c) $A\left(\Gamma_{f_{1,1}}\right)=\int_0^1\dfrac{x}{x+1}dx=1-\ln 2$ ....3 p

NOTĂ. Orice altă rezolvare corectă a problemelor se evaluează cu punctajul maxim.

Preşedintele Comisiei de admitere
Comandor
Conf.univ.Dr. Pricop Mihail

Secretarul Comisiei de admitere
Lt. cdor
Bucur Marius