MINISTERUL APĂRĂRII NAŢIONALE
ACADEMIA NAVALĂ "MIRCEA CEL BĂTRÂN"
FACULTATEA DE MARINĂ CIVILĂ
Sesiunea IULIE 2013

<u>A P R O B</u>
PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE
Cdor.
Conf. univ. Dr. ing.
Mihail PRICOP

PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ

1. a) Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = 2x - 1$. Să se rezolve ecuaţia: $(f \circ g)(x) = 0$.

b) Să se rezolve ecuaţia: $x^2 - 4x = 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} - 10$.

c) Fie ecuaţia $x^2 + (3 - m)x - m - 5 = 0, m \in \mathbb{R}$ şi x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $x_1^2 + x_2^2$ să fie minimă.

2. a) Să se rezolve ecuaţia $3^{x-1} \cdot 2^{x+1} + 2^{x-1} \cdot 3^x = \frac{7}{36}$.

b) Să se determine soluţiile reale ale sistemului $\begin{cases} \log_y x - 2\log_x y = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 3. \end{cases}$

c) Să se rezolve ecuaţia $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x = 2 \cdot \left(\log_x \sqrt{5}\right)^2$.

3. Fie sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x + my - z = 1 \\ -x - y - mz = -1, \quad cu\ m \in \mathbb{R}. \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

a) Să se determine valorile parametrului real *m*, astfel încât matricea sistemului să aibă rangul doi.

b) Să se rezolve sistemul pentru $m = 0$.

c) Să se afle valorile parametrului real *m*, astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

4. a) Să se studieze derivabilitatea funcţiei $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},$ unde $f(x)=\max\left[\cos x,\cos^3 x\right]$.

b) Să se calculeze derivata de ordinul al doilea a funcţiei $f(x)=\cos^3 x$ în punctul π.

c) Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei $f(x)=\cos x$ în punctul $\frac{\pi}{4}$.

5. Fie $I_n=\int_0^1 e^{-x}x^n dx,\quad n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $I_n=n\cdot I_{n-1}-\frac{1}{e}$, $(\forall)\, n\geq 2$.

c) Să se arate că $0\leq I_n\leq\frac{1}{e}$ şi $I_n\geq I_{n+1}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este de 3 ore.

SECRETARUL COMISIEI DE ADMITERE,
Cpt. Cdor.
Ionel POPA

BAREM DE CORECTARE

1. a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x)-1)(g(x)-2)=2(x-1)(2x-3)$ 2p

$(f\circ g)(x)=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=\frac{3}{2}$ 1p

b) Condiţii de existenţă: $x^2-4x+20\geq 0,\ x^2-4x+10\geq 0\Rightarrow x\in\mathbb{R}$ 0,5p

Not. $\sqrt{x^2-4x+20}=t,\ t\geq 0$. Ecuaţia devine $t^2-3t-10=0$ 1,5p

$t_1=5, t_2=-2$ 0,5p

$\sqrt{x^2-4x+20}=5\Rightarrow x_1=5, x_2=-1$ 0,5p

c) $S=x_1+x_2=m-3,\ P=x_1x_2=-m-5$ 0,5p

$x_1^2+x_2^2=m^2-4m+19$ 1p

$x_1^2+x_2^2=(m-2)^2+15\geq 15, \forall m\in\mathbb{R}$ 0,5p

$x_1^2+x_2^2$ este minimă pentru $m=2$ 1p

2. a) $\frac{7}{6}\cdot 3^x\cdot 2^x=\frac{7}{36}$ 1p

$6^x=6^{-1}$ 1p

$x=-1$ 1p

b) $x>0, x\neq 1, y>0, y\neq 1,\ \log_y x-2\log_x y=1\Rightarrow \log_y x=-1, \log_y x=2$ 1p

$x=\frac{1}{y}\Rightarrow x^2+2y^2=3\Leftrightarrow 2y^4-3y^2+1=0\Rightarrow y_{1,2}=\pm 1, y_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Soluţie: $x=\sqrt{2}, y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 1,5p

$x=y^2\Rightarrow x^2+2y^2=3\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$

$\Rightarrow x=1, x=-3$ valori care nu verifică condiţiile de existenţă 0,5p

c) $\log_x 5=t, t^2-3t-2=0$ 1p

$t_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2}\Rightarrow x=5^{\frac{2}{3-\sqrt{17}}}$ 1p

$t_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}\Rightarrow x=5^{\frac{2}{3+\sqrt{17}}}$ 1p

3. a) $A=\begin{pmatrix}1 & m & -1\\ -1 & -1 & -m\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 1p

$\det A=1-m^2$ 1,5p

$m\in\{-1,1\}$ 0,5p

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 1p

$(x,y,z)=(1,0,0)$ 2p

c) $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ 3p

4. a) $g(x)=\cos x-\cos^3 x=\cos x\cdot\sin^2 x$; $g(x)\geq 0, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]; g(x)\leq 0, x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,

$f(x)=\begin{cases}\cos x, 0\leq x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0,\ x=\dfrac{\pi}{2},\\ \cos^3 x, \dfrac{\pi}{2}<x\leq\pi.\end{cases}$ 0,5p

f derivabilă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, f derivabilă pe $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 0,5p

$f_d'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}}\dfrac{\cos^3 x}{x-\frac{\pi}{2}}=0$ 0,75p

$f_s'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$ 0,75p

$f_d'\left(\frac{\pi}{2}\right)\neq f_s'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, deci f nu este derivabilă în $x=\frac{\pi}{2}$ 0,5p

b) $f'(x)=-3\cos^2 x\cdot\sin x$ 1p

$f''(x)=3\cos x\cdot\left(2\sin^2 x-\cos^2 x\right)$ 1,5p

$f''(\pi)=3$ 0,5p

c) $f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x,\ f'''(x)=\sin x$ etc. 1p

$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ 1,5p

$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{4}$ 0,5p

5. a) $I_1=\int_0^1 e^{-x}x\,dx$ 0,5p

$I_1=\int_0^1 e^{-x}x\,dx=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$ 1,5p

$I_1=1-2e^{-1}$ 1p

b) $I_n=\int_0^1 e^{-x}x^n dx=-x^n e^{-x}\Big|_0^1+n\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx$ 2p

$I_n=nI_{n-1}-\frac{1}{e}$ 1p

c) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}\left(x-1\right)dx\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$ 1p

$g\left(x\right)=e^{-x}x^n, g'\left(x\right)=x^{n-1}e^{-x}\left(n-x\right)\ge 0$ 0,5p

$g\left(x\right)$ crescătoare $\Rightarrow g\left(0\right)\le g\left(x\right)\le g\left(1\right)\Leftrightarrow 0\le g\left(x\right)\le\frac{1}{e}$ 0,5p

$0\le I_n\le\frac{1}{e}$ 1p

NOTĂ. Orice altă rezolvare corectă a problemelor se evaluează cu punctajul maxim.

Preşedintele Comisie de Admitere,
Cdor.
Conf. univ. Dr.
Mihail PRICOP

Secretarul Comisie de Admitere,
Cpt. Cdor.
Ionel POPA