

PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ

1. Fie sistemul

$$\begin{cases} x - my + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ mx + m^2 y - z = m^2 \end{cases}, m \in \mathbb{R}.$$

- a) Să se calculeze determinantul matricei atașate sistemului.
 b) Să se rezolve pentru cazul în care sistemul este compatibil determinat.
 c) Să se rezolve pentru cazul $m = -1$.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți în \mathbb{Z} , $f = X^{5n_1} + X^{5n_2+1} + X^{5n_3+2} + X^{5n_4+3} + X^{5n_5+4}$, $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 \in \mathbb{N}$, $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $h = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, $q = X + 1$.

- a) Arătați că $g - 1$ se divide cu q .
 b) Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile lui h , atunci calculați $x_1^{2010} + x_2^{2010} + x_3^{2010} + x_4^{2010}$.
 c) Arătați că f este divizibil cu g .

3. a) Să se calculeze $s F_1(x) = \int (tg^{2010}x + tg^{2012}x) dx$.

b) Să se calculeze $F_2(x) = \int \frac{x^2}{1+x^6} dx$.

c) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = (ax + b)\sqrt{x^2 + 4} + c \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}, x \in \mathbb{R}$$

4. Se consideră funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1 + xe^{|x-1|}}$.

- a) Să se determine domeniul de definiție D al funcției f .
 b) Să se arate că graficul funcției f admite o asimptotă verticală $x = x_0$, unde $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.
 c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

5. a) Dacă $(1 + \sqrt{5})^{2012} = a + b\sqrt{5}$, să se calculeze $a^2 - 5b^2$.

b) Se consideră dezvoltarea $(1 + x + x^2)^{1006} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2012}x^{2012}$. Să se calculeze $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2011}$.

c) Fie $(a + b)^n$, unde $a = \sqrt{2^{\lg(10^{-3^x})}}$ și $b = \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine x dacă în dezvoltarea binomială, termenul care conține b^5 este egal cu 21, iar coeficienții binomiali ai celui de-al doilea, al treilea și al patrulea termen sunt în progresie aritmetică.