MINISTERUL APĂRĂRII NAŢIONALE
ACADEMIA NAVALĂ “MIRCEA CEL BĂTRÂN”
FACULTATEA DE INGINERIE MARINĂ
SECŢIA MARINĂ MILITARĂ
SESIUNEA IULIE 2014

APROB
PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE
Cdor
Prof.univ.dr.ing.
Vasile DOBREF

PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ

1. Fie trinomul de gradul al doilea $x^2-6x+m,\ m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine valorile parametrului real m astfel încât trinomul să admită rădăcini reale şi distincte.

b) Să se determine valorile parametrului real m astfel încât trinomul să ia valori strict pozitive pentru orice x real.

c) Pentru $m=8$ notăm cu x_1 şi x_2, $x_1<x_2$, rădăcinile trinomului. Considerând progresia geometrică, (b_n), unde $b_1=x_1$ şi $b_2=x_2$, determinaţi suma primilor 2014 termeni ai progresiei.

2. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}.$$

a) Să se determine valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat şi în acest caz să se rezolve sistemul.

b) Să se rezolve sistemul pentru $m=2$.

c) Să se rezolve sistemul pentru $m=1$.

3. a) Să se aducă la forma cea mai simplă expresia

$$E(X)=(X+1)(X^2+1)(X^4+1)\ldots(X^{2^n}+1).$$

b) Să se calculeze parametrii reali m şi n astfel încât polinomul

$$f=2X^3-3X^2+mX+n$$

împărţit cu $X-1$ şi $X+2$ să dea resturi egale cu 4 şi, respectiv, -5.

c) Să se arate că polinomul

$$f=\left(X^2+X+1\right)^3-X^3$$

se divide prin polinomul $g=X^2+1$.

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^a f(x)=1$.

b) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

c) Se consideră şirul de numere reale definit prin $a_n=\left[\dfrac{f^{(n)}(2)}{(-1)^n n!}\right]^{2^{n+1}}$, $n\geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

5. a) Să se determine aria cuprinsă între graficul funcţiei $f(x)=\ln x$, axa Ox şi dreptele $x=1, x=2$.

b) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

c) Să se arate că derivata funcţiei $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(a)=a(a+1)\int_0^1\dfrac{dx}{(1+a)^2+a^2x^2}$ este mărginită determinându-i marginile.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este 3 ore.

SECRETARUL COMISIEI DE ADMITERE
Lt. cdor
Dr.ing.
Cătălin CLINCI

BAREM

1. Oficiu 1p

a) $\Delta = 4(9-m)$ 1p

$\Delta > 0 \iff m \in (-\infty, 9)$ 1p

b) $x^2 - 6x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \Delta < 0$ 1p

$4(9-m) < 0 \iff m \in (9, \infty)$ 1p

c) $x^2 - 6x + 8 = 0,\ \Delta = 4$ 1p

$x_1 = 2,\ x_2 = 4$ 1p

$q = \dfrac{x_2}{x_1} = 2$ 1p

$S_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ 1p

$S_{2014} = 2\left(2^{2014} - 1\right)$ 1p

2. Oficiu 1p

a) $rang(A) = rang(\overline{A}) = 3 \iff \Delta = \det A \neq 0 \iff (m-1)^2(m+2) \neq 0 \iff m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ 0,5p

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}, y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}, z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$ 0,5p

$\Delta_x = -(m-1)^2(m+1),\ \Delta_y = (m-1)^2,\ \Delta_z = (m-1)^2(m+1)^2$ 0,5p

$x = -\dfrac{m+1}{m+2},\ y = \dfrac{1}{m+2},\ z = \dfrac{(m+1)^2}{m+2}$ 0,5p

b) $x = -\dfrac{3}{4}$ 2p

$y=\dfrac{1}{4}$ 1p

$z=\dfrac{9}{4}$ 1p

c) Pentru $m=1, rang(A)=rang(\overline{A})=1$ 1p

Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, $y=\alpha,\ z=\beta$ sunt necunoscute secundare şi x este necunoscuta principală 0,5p

Soluţia sistemului este $(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 1,5p

3. Oficiu 1p

a) $(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^4+1)\ldots\left(X^{2^n}+1\right)=X^{2^{n+1}}-1$ 2p

$E(X)=\dfrac{X^{2^{n+1}}-1}{X-1}$ 1p

b) $f(1)=4\Leftrightarrow m+n=5$ 1p

$f(-2)=-5\Leftrightarrow 2m-n=-23$ 1p

$m=-6,\ n=11$ 1p

c) $A^3-B^3=(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)$ 1p

$f=g\cdot\left[\left(X^2+X+1\right)^2+\left(X^2+X+1\right)X+X^2\right]=g\cdot\left(X^4+3X^3+5X^2+3X+1\right)$ 2p

4. Oficiu 1p

a) $\lim\limits_{x\to\infty}x^a f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{a-2}}{1-\dfrac{1}{x}}=1\Leftrightarrow a=2$ 1p

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$ 0,5p

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$ 0,5p

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty \Rightarrow x=0$ asimptotă verticală 1p

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty \Rightarrow x=1$ asimptotă verticală 1p

c) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$ 1p

$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{x^{n+1}}\right]$ 1p

$f^{(n)}(2)=(-1)^n n!\left[1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right]$ 1p

$a_n=\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)^{2^{n+1}}$ 1p

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{e}$ 1p

5. Oficiu 1p

a) $A=\int_1^2 |f(x)|dx$ 1p

$A=\int_1^2 |\ln x| dx=\int_1^2 \ln x dx=\int_1^2 x'\ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_1^2=2\ln 2-1$ 1p

b) $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$ 1p

$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos 2x}{2}dx=\pi\left(\dfrac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\dfrac{\pi^2}{4}$ 1p

c) $f(a)=(a+1)\int_0^1 \dfrac{d(ax)}{(1+a)^2+(ax)^2}=(a+1)\dfrac{1}{a+1}arctg\,\dfrac{ax}{1+a}\Big|_0^1=arctg\,\dfrac{a}{1+a}$ 2p

$$f'(a)=\frac{\left(\frac{a}{1+a}\right)'}{1+\left(\frac{a}{1+a}\right)^2}=\frac{1}{2a^2+2a+1}$$ 2p

$f''(a)=\dfrac{-4a-2}{\left(2a^2+2a+1\right)^2}<0,\forall a>0 \Rightarrow f'$ monoton descrescătoare pe $(0,\infty)$.

$\lim\limits_{\substack{a\to a\\ a>0}} f'(a)=1,\ \lim\limits_{a\to\infty} f'(a)=0$, deci $0<f'(a)<1,\ a>0$ 1p

Notă. Orice altă rezolvare corectă a problemelor se evaluează cu punctajul maxim.

PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE
Cdor
Prof.univ.dr.ing.
Vasile DOBREF

SECRETARUL COMISIEI DE ADMITERE
Lt. cdor
Dr.ing.
Cătălin CLINCI