MINISTERUL APĂRĂRII NAŢIONALE
ACADEMIA NAVALĂ "MIRCEA CEL BĂTRÂN"
SESIUNEA IULIE 2014

<u>APROB</u>
PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE F.I.M.
Cdor
Prof.univ.dr.ing.
Vasile DOBREF

PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE F.N.M.N.
Cpt.Cdor
Dr.ing.
Dinu ATODIRESEI

PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ

1. a) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+2(m+1)x+m+2$, $m\neq 0$. Să se afle m astfel încât $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=m \end{cases}$ are o unică soluţie reală.

c) Arataţi că ecuaţia $a^2x^2+\left(b^2+a^2-c^2\right)x+b^2=0$ nu are rădăcini reale dacă $a+b>c$ şi $|a-b|<c$.

2. a) Să se dezvolte expresia $E(x)=(1-x)^5$.

b) Să se verifice egalitatea $\frac{(k-1)!}{(k+1)!}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ şi să se calculeze suma $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!}{(k+1)!}$.

c) Să se rezolve inecuaţia $C_x^6<C_x^4$.

3. Fie $A=\begin{pmatrix} \sqrt{3}m^2 & 1 \\ -m & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă.

b) Pentru $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ să se calculeze inversa matricei A.

c) Pentru $m=1$ să se determine valorile lui $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $A^n=2^nI_2$, unde I_2 este matricea unitate.

4. a) Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\ln x$. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x=1$.

b) Să se calculeze limita $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

c) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x^2)-mx,\ m\in\mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât funcţia f să fie monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5. Se consideră $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+6x+10}dx,\ n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se arate că $I_{n+2}+6I_{n+1}+10I_n=\dfrac{1}{n+1}$.

c) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este 3 ore.

SECRETARUL COMISIEI DE ADMITERE

Lt.Cdor
Dr.ing.
Cătălin CLINCI

BAREM

1. Oficiu 1p

a) $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ 1p

$\begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in (0, +\infty) \\ m \in \phi \end{cases} \Rightarrow m \in \phi$ 2p

b) Eliminând z din sistem, rezultă $x^2 + x + y^2 + y - m = 0$ 1p

$\Delta_x = 1 - 4(y^2 + y - m) = 0 \Rightarrow 4y^2 + 4y - 4m - 1 = 0$

$\Delta_y = 16 - (-4m - 1) = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ 2p

c) $\Delta < 0$ 1p

$\Delta = (b^2 + a^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (b - a - c)(b - a + c)(b + a - c)(b + a + c)$ 1p

$a + b > c, b + c > 0, a + c > b \Rightarrow \Delta < 0$ 1p

2. Oficiu 1p

a) $E(x) = \sum_{k=0}^{5} C_5^k (-x)^k = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$ 2p

b) $\frac{(k-1)!}{(k+1)!} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ 1p

$S = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ 2p

c) $x \in [6, +\infty) \cap \mathbb{N}$ 1p

$\frac{x!}{6!(x-6)!} < \frac{x!}{4!(x-4)!} \Leftrightarrow (x-4)(x-5) < 30$ 1p

$x^2 - 9x - 10 < 0$ 1p

$x \in \{6,7,8,9\}$ 1p

3. Oficiu 1p

a) A este inversabilă dacă este pătratică şi $\det A \neq 0$ 2p

$\det A = 3m^2 + m \neq 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$ 1p

b) $\det A = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \neq 0 \Rightarrow$ există A^{-1} 1p

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$ 0,5p

$A^* = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ 1,5p

c) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & \sin\frac{n\pi}{6} \\ -\sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$ 1p

$\begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & \sin\frac{n\pi}{6} \\ -\sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{n\pi}{6} = 1 \\ \sin\frac{n\pi}{6} = 0 \end{cases}$ 1p

$\begin{cases} \frac{n\pi}{6} = 2k\pi \\ \frac{n\pi}{6} = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} n = 12k \\ n = 6k \end{cases} \Rightarrow n \in \{12k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 1p

4. Oficiu 1p

a) $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ 1p

$f'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}\Rightarrow f'(1)=2$ 1p

$y=2(x-1)$ 1p

b) $L=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ 1p

$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ 1p

$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$ 1p

c) Dacă $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$, atunci f este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$ 1p

$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-m=\frac{-mx^2+2x-m}{1+x^2}$ 1p

$-mx^2+2x-m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\le 0\\ -m>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\\ m\in(-\infty,0)\end{cases}\Rightarrow m\in(-\infty,-1]$ 1p

5. Oficiu 1p

a) $I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+6x+10}dx$ 1p

$I_0=\int_0^1\frac{1}{(x+3)^2+1}dx$ 1p

$I_0=arctg(x+3)\Big|_0^1=arctg4-arctg3$ 1p

b) $I_{n+2}+6I_{n+1}+10I_n=\int_0^1 x^n dx$ 2p

$\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$ 1p

c) $0\le\frac{x^n}{x^2+6x+10}<x^n$ 1p

$0\le I_n<\frac{1}{n+1}$ 1p

$\lim_{n\to\infty} I_n=0$ 1p

Notă. Orice altă rezolvare corectă a problemelor se evaluează cu punctajul maxim.

PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE F.I.M.
Cdor
Prof.univ.dr.ing.
Vasile DOBREF

PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE F.N.M.N.
Cpt.Cdor
Dr.ing.
Dinu ATODIRESEI

SECRETARUL COMISIEI DE ADMITERE

Lt. Cdor

Dr.ing.

Cătălin CLINCI